Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

**Olimpiada Naţională de Matematică**

**Etapa finală, Constanţa, 3 aprilie 2012**

## CLASA a VII-a
## SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

**Problema 1.**

**Soluţia 1. a)** Fie $M$ şi $N$ proiecţiile lui $P$ pe $AB$, respectiv $CD$. Atunci $PB^2-PA^2=MB^2-MA^2=NC^2-ND^2=PC^2-PD^2$, de unde $PD=\sqrt{2}$ ........................................................**2 puncte**

**b)** Cum $\Delta PAB\equiv\Delta PAD$ (LLL), rezultă că $m(\sphericalangle PAB)=45^\circ$. ........................................................**2 puncte**

Din teorema lui Pitagora, $PM=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}PB$, de unde $m(\sphericalangle PBM)=30^\circ$ ........................................................**2 puncte**

$m(\sphericalangle APB)=m(\sphericalangle APM)+m(\sphericalangle MPB)=45^\circ+60^\circ=105^\circ$ ...**1 punct**

**Soluţia 2. a)** Dacă $\{O\}=AC\cap BD$, segmentul $[PO]$ este mediană în triunghiurile (eventual degenerate) $PAC$ şi $PBD$, de unde $PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$. Rezultă că $PD=\sqrt{2}$ ............................**2 puncte**

**b)** Fie $Q$ astfel încât $PB=BQ$, $m(\sphericalangle PBQ)=90^\circ$, $P$ şi $Q$ de o parte şi de alta a lui $BC$. Atunci $\Delta ABP\equiv\Delta CBQ$ (LUL) .............**2 puncte**

Din teorema lui Pitagora în $\Delta PBQ$, $PQ=2$, iar din reciproca teoremei lui Pitagora în $\Delta PCQ$ rezultă $m(\sphericalangle PCQ)=90^\circ$ ..................**1 punct**

Cum $CQ=\frac{1}{2}PQ$, rezultă $m(\sphericalangle CPQ)=30^\circ$ ..................**1 punct**

$m(\sphericalangle APB)=m(\sphericalangle CQB)=m(\sphericalangle CQP)+m(\sphericalangle PQB)=60^\circ+45^\circ=105^\circ$ ........................................................**1 punct**

**Problema 2.** Triunghiul $ABC$ este dreptunghic în $A$. Se consideră punctele $D\in(AC)$ şi $E\in(BD)$ astfel încât $\sphericalangle ABC\equiv\sphericalangle ECD\equiv\sphericalangle CED$. Arătaţi că $BE=2\cdot AD$.

**Soluţie** Construim $D'$ simetricul lui $D$ faţă de $A$. ............ **1 punct**

Notând $m(\sphericalangle ABC)=m(\sphericalangle ECD)=m(\sphericalangle CED)=x$, rezultă că $m(\sphericalangle ADB)=2x$ şi $m(\sphericalangle ABD')=m(\sphericalangle ABD)=90^\circ-2x$, de unde rezultă că $m(\sphericalangle CBD')=x+90^\circ-2x=90^\circ-x$. ......................**2 puncte**

În triunghiul $BCD'$, deoarece $m(\sphericalangle BD'C)=2x$, rezultă că $m(\sphericalangle BCD')=90^\circ-x=m(\sphericalangle CBD')$, deci triunghiul $D'BC$ este isoscel şi $D'C=D'B=DB$. ........................................................**2 puncte**

Dar $DC=DE$, de unde $BE=BD-DE=CD'-CD=DD'=2\cdot AD$. ........................................................**2 puncte**

**Problema 3.** Se consideră numerele naturale nenule $(m,n)$ astfel încât numerele

$$\frac{m^2+2n}{n^2-2m} \quad \text{şi} \quad \frac{n^2+2m}{m^2-2n}$$

sâ fie întregi.

a) Arătaţi că $|m-n| \leq 2$.

b) Găsiţi toate perechile $(m,n)$ cu proprietatea din ipoteză.

**Soluţie**

a) Cum $(m^2-2n) \mid (n^2+2m)$ şi $n^2+2m>0$, rezultă $m^2-2n \leq n^2+2m$, adică $(m-1)^2 \leq (n+1)^2$, sau $m \leq n+2$. Analog $n \leq m+2$.. În consecinţă $|m-n| \leq 2$. .................................................. **2 puncte**

b) Presupunem $n \geq m$. Atunci $n \in \{m, m+1, m+2\}$.

Dacă $n=m$, trebuie ca $\frac{n+2}{n-2} = 1+\frac{4}{n-2} \in \mathbb{Z}$, de unde $n \in \{1,3,4,6\}$. Obţinem perechile $(n,m) \in \{(1,1),(3,3),(4,4),(6,6)\}$ ........... **1 punct**

Dacă $n=m+1$, atunci $\frac{m^2+2n}{n^2-2m} = 1+\frac{2m+1}{m^2+1}$.

Pentru $m \geq 3$ avem $0<\frac{2m+1}{m^2+1}<1$, deci $\frac{2m+1}{m^2+1} \notin \mathbb{Z}$.

Pentru $m=1$, $\frac{2m+1}{m^2+1} = \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$, iar pentru $m=2$ $(n=3)$ avem $\frac{n^2+2m}{m^2-2n} = \frac{13}{-2} \notin \mathbb{Z}$. Aşadar în cazul $n=m+1$ nu avem soluţii. .............. **1 punct**

Dacă $n=m+2$, avem $\frac{m^2+2n}{n^2-2m} = 1 \in \mathbb{Z}$. Trebuie ca $\frac{n^2+2m}{m^2-2n} = 1+\frac{8m+8}{m^2-2m-4} \in \mathbb{Z}$.

Dacă $m \geq 12$, atunci $m^2-2m-4 > 8m+8$. Într-adevăr, $m^2-10m-12 = m(m-10)-12 \geq 12\cdot 2-12>0$. Rezultă că pentru $m \geq 12$ avem $\frac{n^2+2m}{m^2-2n} \notin \mathbb{Z}$. Pentru $m \in \{1,2,\ldots,11\}$ se verifică perechile obţinute şi se constată că $\frac{n^2+2m}{m^2-2n} \in \mathbb{Z}$ pentru $(m,n) \in \{(2,4),(3,5),(4,6)\}$

În concluzie, având în vedere simetria fracţiilor,

$(m,n) \in \{(1,1),(3,3),(4,4),(6,6),(2,4),(4,2),(3,5),(5,3),(4,6),(6,4)\}$.

.................................................. **3 puncte**

**Problema 4.** Numim *redus* al unui număr natural $A$ cu $n$ cifre $(n \geq 2)$ un număr de $n-1$ cifre obţinut prin ştergerea uneia din cifrele lui $A$. De exemplu, reduşii lui 1024 sunt 124, 104 şi 120.

Determinaţi câte numere de şapte cifre **nu** se pot scrie ca suma dintre un număr natural $A$ şi un *redus* al lui $A$.

**Soluţie.**

Să numim *convenabil*, respectiv *neconvenabil*, un număr care se poate, respectiv nu se poate scrie ca suma dintre un număr şi un redus al său.

Suma dintre numărul $A = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$ şi redusul său $B = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ este numărul $11B+a_7$, adică un număr de cel puţin 7 cifre, mai mare decât $11\cdot 10^5$, care nu dă restul 10 la împărţirea cu 11.

Alegând în mod potrivit numărul $B$ şi cifra $a_7$, rezultă că orice număr de 7 cifre, mai mare decât $11\cdot 10^5$, care dă restul diferit de 10 la împărţirea cu 11, este convenabil. .............................................. **1 punct**

Suma dintre numărul $C = \overline{c_1c_2c_3c_4c_5c_6}$ şi redusul său $D = \overline{c_1c_2c_3c_4c_5}$ este numărul $11D+c_6$, adică un număr de cel mult 7 cifre, mai mic decât $11\cdot 10^5$, care nu dă restul 10 la împărţirea cu 11.

Ca urmare, alegând în mod potrivit numărul $D$ şi cifra $c_6$, rezultă că orice număr de 7 cifre, mai mic decât $11 \cdot 10^5$, care dă restul diferit de 10 la împărţirea cu 11, este convenabil. ................................ **1 punct**

Aşadar, numerele *neconvenabile* se află în mulţimea numerelor de 7 cifre care dau restul 10 la împărţirea cu 11. Întrucât suma oricărui număr natural cu orice redus al său, altul decât cel obţinut prin ştergerea ultimei cifre, este un număr par, rezultă că numerele de 7 cifre, de forma $22p+21$, $p \in \mathbb{N}$, sunt *neconvenabile*. ................................................ **2 puncte**

Rămâne să studiem situaţia numerelor de 7 cifre, de forma $22p+10$, $p \in \mathbb{N}$. Vom arăta că aceste numere se pot scrie sub forma

$$\overline{a_1a_2...a_{n-2}a_{n-1}a_n} + \overline{a_1a_2...a_{n-2}a_n} = 110 \cdot \overline{a_1a_2...a_{n-2}} + 10 \cdot a_{n-1} + 2a_n,$$

unde $n \in \{6,7\}$.

Numerele de forma $22p+10$, $p \in \mathbb{N}$, au, în funcţie de restul împărţirii lui $p$ la 5, una din formele $110k+10$, $110k+32$, $110k+54$, $110k+76$, $110k+98$, $k \in \mathbb{N}$.

Alegând $k = \overline{a_1a_2...a_{n-2}}$ şi, de exemplu, $(a_{n-1}, a_n) \in \{(1,0),\ (3,1),\ (5,2),\ (7,3),\ (9,4)\}$, rezultă că numerele de forma $22p+10$, $p \in \mathbb{N}$, sunt convenabile. ................................ **2 puncte**

Ca urmare, numerele *neconvenabile* de 7 cifre sunt cele de forma $22p+21$, $p \in \mathbb{N}$. Din $10^6 \leq 22p+21 \leq 10^7-1$, rezultă că $45\,454 \leq p \leq 454\,544$. Cum $p$ ia $454\,544 - 45\,454 + 1 = 409\,091$ valori, rezultă că sunt $409\,091$ numere *neconvenabile* de 7 cifre. ........................................ **1 punct**